

Über die rationalen Punkte auf der Sphäre

von Nikolay Moshchevitin¹ (Moskau)

Wir beschäftigen uns hier mit der Approximation von Punkten auf der n -dimensionalen Sphäre durch rationale Punkte der n -dimensionalen Sphäre. Wir geben einen kurzen Beweis des hübschen Satzes von Kleinbock und Merrill [6], im einfachen Fall $n = 2$.

§1. Parametrisierung der Sphäre.

Es sei

$$\mathfrak{S}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

eine Sphäre vom Radius 1 im Euklidischen Raum \mathbb{R}^{n+1} . Für $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir die Funktionen

$$f_j(\mathbf{t}) = \frac{2t_j}{1 + t_1^2 + \dots + t_n^2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad f_{n+1}(\mathbf{t}) = \frac{1 - t_1^2 - \dots - t_n^2}{1 + t_1^2 + \dots + t_n^2}.$$

Bekanntlich ist, jeder rationale Punkt

$$\mathbf{x} = \left(\frac{A_1}{Q}, \dots, \frac{A_{n+1}}{Q} \right), \quad A_1, \dots, A_{n+1}, Q \in \mathbb{Z}, \quad (Q, A_1, \dots, A_{n+1}) = 1$$

auf der Sphäre \mathfrak{S}^n ist von der Form

$$\frac{A_j}{Q} = f_j(\mathbf{t}) = \frac{2b_j q}{q^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \frac{A_{n+1}}{Q} = f_{n+1}(\mathbf{t}) = \frac{q^2 - b_1^2 - \dots - b_n^2}{q^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2}, \quad (1)$$

wo

$$\mathbf{t} = \left(\frac{b_1}{q}, \dots, \frac{b_n}{q} \right), \quad q \in \mathbb{Z}_+, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}, \quad (q, b_1, \dots, b_n) = 1.$$

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathfrak{S}^n$ setzen wir $\alpha \mapsto \beta = \beta(\alpha) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ $\alpha_j = f_j(\beta)$, $j = 1, \dots, n + 1$.

§2. Resultate.

E. Hlawka [5] hat folgendes gezeigt. Sei $\alpha \in (0, 1)$, dann gibt es zu jedem genügend großen $N > 1$, nicht negative Zahlen u, v , so dass $1 \leq v \leq N$ und

$$\left| \alpha - \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} \right| \leq \frac{2}{Nv}, \quad \left| \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2uv}{v^2 + u^2} \right| \leq \frac{2}{Nv}$$

gilt.

L. Fukshansky [4] bemerkt, dass für $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{S}^1, \{\alpha_1, \alpha_2\} \not\subset \{0, \pm 1\}$ die Behauptung von Hlawka unendlich viele rationalen Punkten $\left(\frac{A_1}{Q}, \frac{A_2}{Q} \right) \in \mathfrak{S}^1$ liefert mit

$$\max_{i=1,2} \left| \alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{Q}.$$

¹ Die Untersuchung ist von der Beihilfe der russischen Regierung 11. G34.31.0053 und RFBR No.12-01-00681-a unterstützt.

Kleinbock und Merrill [6] hatten folgendes gezeigt. Für jedes n es gibt eine sehr große positive Konstante C_n mit

$$\min_{(\frac{A_1}{Q}, \dots, \frac{A_n}{Q}) \in \mathfrak{S}^{n+1}, 1 \leq Q \leq T} \left| \alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right| \leq \frac{C_n}{\sqrt{QT}} \quad \text{für alle } T \geq 1,$$

sodass für jedes $\alpha \in \mathfrak{S}^{n+1}$ unendlich viele rationale Punkte $\left(\frac{A_1}{Q}, \dots, \frac{A_n}{Q}\right) \in \mathfrak{S}^{n+1}$ existieren mit

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right| \leq \frac{C_n}{Q}.$$

Im Falle $n = 1$ wir wollen die folgende Behauptung beweisen:

Satz 1. *Es sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{S}^1 \setminus \mathbb{Q}^2$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt unendlich viele rationale Vektoren $\left(\frac{A_1}{Q}, \frac{A_2}{Q}\right) \in \mathfrak{S}^1 \cap \mathbb{Q}^2$, so dass*

$$\sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right)^2} < \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2Q}}. \quad (2)$$

Bemerkung 1. *Im Satz 1 kann $\sqrt{2}$ durch keine größere Zahl ersetzt werden.*

Wir wollen jetzt im Falle $n = 2$ die folgenden Behauptungen beweisen:

Satz 2. *Es sei $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $T \geq 1$. Es gibt einen rationalen Vektor $\left(\frac{b_1}{q}, \frac{b_2}{q}\right)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $1 \leq q \leq T$;
- (ii) $\sum_{i=1,2} (q\beta_i - b_i)^2 < \frac{4q}{T}$
- (iii) $b_1^2 + b_2^2 \equiv 0 \pmod{q}$.

Satz 3. *Sei $\gamma > \sqrt{\frac{3}{\pi}}$. Sei β_1 oder β_2 nicht rational. Dann existieren unendlich viele rationalen Vektoren $\left(\frac{b_1}{q}, \frac{b_2}{q}\right)$ mit (iii) und*
(ii*) $\sum_{i=1}^2 (q\beta_i - b_i)^2 < \gamma^2$.

Bemerkung 2. Man kann die Ungleichung (ii) in folgende Form umschreiben:

$$\sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\beta_i - \frac{b_i}{q} \right)^2} < \frac{2}{\sqrt{qT}}.$$

Aus den Sätzen 2,3 und (1) erhalten wir die Folgerungen:

Satz 4. *Es sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathfrak{S}^2$ und $T \geq 1$. Es gibt einen rationale Vektor $\left(\frac{A_1}{Q}, \frac{A_2}{Q}, \frac{A_3}{Q}\right)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $1 \leq Q \leq T$;
- (ii) $\sqrt{\sum_{i=1,2,3} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right)^2} < \frac{4 + \varepsilon_T}{\sqrt{QT}}$, wo $\varepsilon_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$.

Satz 5. Es sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathfrak{S}^2 \setminus \mathbb{Q}^3$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es unendlich viele rationale Vektoren $\left(\frac{A_1}{Q}, \frac{A_2}{Q}, \frac{A_3}{Q}\right) \in \mathfrak{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$, so dass

$$\sqrt{\sum_{i=1,2,3} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q}\right)^2} < \left(2\sqrt{\frac{3}{\pi}} + \varepsilon\right) \frac{1}{Q}.$$

§3. Der Fall $n = 1$. Beweis des Satzes 1 und der Bemerkung 1.

Sei $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$. In diesem Falle folgt aus (1)

$$\sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q}\right)^2} \leq 2|\arctan \beta - \arctan t| \leq \frac{2}{1+\xi^2} |\beta - t|, \quad t = \frac{b}{q} = \frac{b_1}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \beta = \beta(\alpha) \in (0, 1) \quad (3)$$

(hier ξ ist eine Zahl zwischen β und t).

Hilfssatz 1. Es sei $n = 1$. Dann ist in (1) $Q = q^2 + b^2$ wenn $b \not\equiv q \pmod{2}$ und $Q = \frac{q^2+b^2}{2}$ wenn $b \equiv q \pmod{2}$.

Beweis. Es sei $b \not\equiv q \pmod{2}$. Dann $(2bq, q^2 - b^2, q^2 + b^2) = 1$, sodass $Q = q^2 + b^2$.

Sei $b \equiv q \pmod{2}$. Dann $(2bq, q^2 - b^2, q^2 + b^2) = 2$, sodass $Q = \frac{q^2+b^2}{2}$. \square

Hilfssatz 2. Sei $pq' - p'q \equiv 1 \pmod{2}$. Dann sind $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$, oder $p' \equiv q' \equiv 1 \pmod{2}$, oder $p + p' \equiv q + q' \equiv 1 \pmod{2}$.

Beweis: Dieser Hilfssatz ist evident. \square

Beweis des Satzes 1.

Fall 1. β und $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ seien äquivalent. Dann ist der Kettenbruch für β von der Form

$$\beta = [B_0; B_1, \dots, B_t, B_{t+1}, \dots], \quad B_\nu = 1, \quad \nu > t.$$

Für den Näherungsbruch

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [B_0; B_1, \dots, B_\nu]$$

man hat

$$\left| \beta - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| < \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{5}q_\nu^2}$$

wenn ν groß genug ist [1, Kap. II]. Für jedes $\nu \geq t$ liefert Hilfssatz 2 ein $j \in \{\nu - 1, \nu, \nu + 1\}$ mit $p_j \equiv q_j \pmod{2}$. Es sei $t_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$. Nun folgt für $\frac{A_{i,\nu}}{Q_\nu} = f_i(t_\nu)$ aus (3) und Hilfssatz 1

$$Q_\nu \cdot \sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_{i,\nu}}{Q_\nu}\right)^2} \leq \frac{q_\nu^2 + p_\nu^2}{1 + \xi_\nu^2} |\beta - t_\nu| = \frac{1 + t_\nu^2}{1 + \xi_\nu^2} \cdot q_\nu |q_\nu \beta - p_\nu| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}},$$

mit $\nu \rightarrow \infty$ (hier ist ξ_ν zwischen β und t_ν). Daraus folgt die Behauptung wegen $\sqrt{5} > \sqrt{2}$.

Fall 2. β und $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ seien nicht äquivalent. Dann es gibt unendlich viele rationalen Zahlen $t = \frac{b}{q}$ mit

$$\left| \beta - \frac{b}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2}, \quad (b, q) = 1$$

(siehe [1, Kap. II]). Hilfssatz 1 liefert $Q \leq q^2 + b^2$. Nun folgt aus (3) und Hilfssatz 1

$$Q \cdot \sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right)^2} \leq \frac{2(q^2 + b^2)}{1 + \xi^2} |\beta - t| = \frac{2(1 + t^2)}{1 + \xi^2} \cdot q |q\beta - b| \leq \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2}},$$

wenn q groß genug ist. Daraus folgt Satz 1. \square

Beweis der Bemerkung 1.

Es sei $\beta = [0; 2, 4, \overline{2}]$.

1. Für jeden Näherungsbruch $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ gilt $p_\nu \not\equiv q_\nu \pmod{2}$. Aber β und $\sqrt{2}$ sind äquivalent und $\frac{A_{i,\nu}}{Q_\nu} = f_i \left(\frac{p_\nu}{q_\nu} \right)$. Nach Hilfssatz 1 ist

$$Q_\nu \cdot \sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_{i,\nu}}{Q_\nu} \right)^2} = \frac{2(q_\nu^2 + p_\nu^2)}{1 + t_\nu^2 + o(1)} |\beta - t_\nu| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

2. Wenn $t = \frac{b}{q}$, $b > 9$ gilt für den Median $\frac{b}{q} = \frac{p_{\nu-1} + p_\nu}{q_{\nu-1} + q_\nu}$ und es ist $q = q_{\nu-1} + q_\nu = \frac{q_{\nu-1} + q_{\nu+1}}{2}$. Also ist

$$|q\beta - b| = \frac{|q_{\nu-1}\beta - p_{\nu-1}| + |q_{\nu+1}\beta - p_{\nu+1}|}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{q_{\nu-1}} + \frac{1}{q_{\nu+1}} \right) (1 + o(1)).$$

Bemerken wir, dass $q_\nu = \xi(1 + \sqrt{2})^\nu(1 + o(1))$, $\nu \rightarrow \infty$ mit positiven ξ . Also gilt für hinreichend großes q

$$\left| \beta - \frac{b}{q} \right| = \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{2}q^2}. \quad (4)$$

3. Sei $t = \frac{b}{q}$ weder ein Näherungsbruch $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ noch ein Median $\frac{b}{q} = \frac{p_{\nu-1} + p_\nu}{q_{\nu-1} + q_\nu}$. Dann folgt aus dem Satz von Fatou [2,3]

$$\left| \beta - \frac{b}{q} \right| \geq \frac{1}{q^2}.$$

Also gilt (4) für jeden Bruch $t = \frac{b}{q}$ mit q hinreichend groß. Und daher haben wir

$$Q \cdot \sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q} \right)^2} = 2Q |\arctan \beta - \arctan t| (1 - \varepsilon) \geq (q^2 + b^2) \left| \arctan \beta - \arctan \frac{b}{q} \right| (1 - \varepsilon) \geq \frac{1 - 2\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Damit ist die Bemerkung bewiesen. \square

§4. Die Körper im \mathbb{R}^4 .

Es sei

$$f(\mathbf{w}) = f(z, y, x_1, x_2) = zy - x_1^2 - x_2^2.$$

Wir definieren die Körper

$$\mathfrak{P} = \{ \mathbf{w} = (z, y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : |f(\mathbf{w})| < 1 \}$$

und

$$\mathfrak{K} = \left\{ \mathbf{w} = (z, y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : |z + y| < 2, |z - y| < 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{\gamma} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\gamma} \right)^2} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{w} = (z, y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : |\xi| < 1, \eta^2 + \left(\frac{x_1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\gamma}\right)^2 < 1 \right\},$$

wo

$$\begin{cases} z = \xi + \eta, \\ y = \xi - \eta. \end{cases}$$

Beachte, dass \mathfrak{K} konvex ist und $\text{vol } \mathfrak{K} = \frac{16\pi}{3} \cdot \gamma^2 > 16$.

Hilfssatz 3. $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}$.

Beweis. Es sei $\mathbf{w} \in \mathfrak{K}$. Wir haben $x_1^2 + x_2^2 - 1 < zy = \frac{(z+y)^2 - (z-y)^2}{4} < 1$, sodass $-1 < zy - x_1^2 - x_2^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2 \leq 1$. \square

Wir betrachten die beiden Setzen wir zwei Matrizen

$$G_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 & 1 & -2\beta_1 & -2\beta_2 \\ -\beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det G_t = \det R_\beta = 1.$$

Es ist klar dass

$$f(G_t \mathbf{w}) = f(R_\beta \mathbf{w}) = f(\mathbf{w})$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}^2, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$.

Sei $\mathfrak{K}_\beta^t = R_\beta^{-1} G_t \mathfrak{K}$. Aus Hilfsatz 3 folgt $\mathfrak{K}_\beta^t \subset \mathfrak{S}$, für alle $t \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}^2$.

§5. Beweis der Sätze 2,3.

Wegen $\text{vol } \mathfrak{K}_\beta^t > 16$, existiert nach dem Gitterpunktsatz von Minkowski ein Gitterpunkt $\mathbf{g} = (q, a, b_1, b_2) \in \mathfrak{K}_\beta^t \cap \mathbb{Z}^4, \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Sei

$$L = L(\mathbf{g}) = q(\beta_1^2 + \beta_2^2) + A - 2b_1\beta_1 - 2b_2\beta_2, \quad \Delta = \Delta(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^2 (q\beta_i - b_i)^2.$$

Es ist $R_\beta \mathbf{g} \in G_t \mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}$, denn

$$|f(q, L, q\beta_1 - b_1, q\beta_2 - b_2)| < 1 \quad \text{und} \quad |qA - b_1^2 - b_2^2| < 1.$$

Aber $qA - b_1^2 - b_2^2$ ist ganzzahlig, sodass

$$qA = b_1^2 + b_2^2, \tag{5}$$

und (iii) folgt. Es ist klar dass $q \neq 0$. Sei $q \geq 1$. Dann liefert (5)

$$L = \frac{q(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \frac{b_1^2 + b_2^2}{q} - 2b_1\beta_1 - 2b_2\beta_2}{q} = \frac{\Delta}{q}.$$

Wegen $G_t^{-1} R_\beta \mathbf{g} = (qt^{-1}, tq^{-1}\Delta, b_1 - q\beta_1, b_2 - q\beta_2) \in \mathfrak{K}$, haben wir (ii*) und $qt^{-1} + \frac{\Delta}{qt^{-1}} < 2$. Es folgt $\max\left(qt^{-1}, \frac{\Delta}{qt^{-1}}\right) < 2$, sodass $q < 2t$ und $\Delta < \frac{2q}{t}$. Setzt man $t = T/2$, so haben wir Satz 2 damit bewiesen.

Aber $(\beta_1, \beta_2) \notin \mathbb{Q}^2$, so gibt es unendlich viele Vektoren $\left(\frac{b_1}{q}, \frac{b_2}{q}\right)$ mit (ii*), und wir haben Satz 3 bewiesen.

§6. Über die Beweise die Sätze 4,5.

Für $\beta = \beta(\alpha) \in \mathbb{R}^2$ wählen wir den Vektor $\left(\frac{b_1}{q}, \frac{b_2}{q}\right)$ aus Satz 3 mit $\gamma \in \left(\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \sqrt{\frac{3}{\pi}} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Wenn $b_1^2 + b_2^2 \equiv 0 \pmod{q}$ haben wir $q \mid (2b_1q, 2b_2q, q^2 - b_1^2 - b_2^2, q^2 + b_1^2 + b_2^2)$. Für den Nenner Q aus (1) haben wir somit $Q \leq q + \frac{b_1^2 + b_2^2}{q}$ und

$$Q \cdot \sqrt{\sum_{i=1,2,3} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q}\right)^2} \leq q \left(1 + \frac{b_1^2 + b_2^2}{q^2}\right) \cdot \frac{2}{1+r^2} \cdot \frac{\gamma}{q} < 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} + \varepsilon$$

(hier r ist eine reelle Zahl zwischen $\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$ und $\frac{b_1^2 + b_2^2}{q^2}$). Satz 5 folgt daraus. Der Beweis des Satzes 4 mit Hilfe von Satz 2 verläuft analog.

Der Autor dankt L. Summerer für die Hilfe in der Übersetzung.

Literaturverzeichnis

- [1] J. W. S. Cassels, An introduction to Diophantine approximation, Cambridge University Press, 1957.
- [2] J. H. Grace, The classification of rational approximations, Proc. London Math. Soc. 17 (1918), 27 - 258.
- [3] P. Fatou, Sur l'approximation incommensurables et les séries trigonométriques, C.R. Acad. Sci. Paris, 139 (1904), 1019 - 1021.
- [4] L. Fukshansky, On similarity classes of well-rounded sublattices of \mathbb{Z}^2 , Journal of Number Theory 129 (2009), 2530 - 2556.
- [5] E. Hlawka, Approximation von Irrationalzahlen und pithagoräische Tripel, Bonner Mathematische Schriften, 121 (1980), 1 - 32.
- [6] D. Kleinbock, K. Merrill, Rational approximation on Spheres, preprint available at arXiv:1301.0989v4 [math.NT] 25 May 2013.